

1) Najděte všechna řešení rovnice:

$$8y(n+3) + y(n) = 3n + \frac{1}{2^n}$$

Nejprve nalezneme fund. systém
odpovídající homogenní rovnice

$$8y(n+3) + y(n) = 0.$$

Char. polynomial je

$$0 = 8\lambda^3 + 1 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(8\lambda^2 - 4\lambda + 2)$$

Kořeny dvojčlena jsou $\frac{4 \pm \sqrt{16 - 64}}{16} =$

$$= \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{-3}\right). \text{ Označme } \xi = \frac{1}{4} (1 + i\sqrt{3}), \text{ pak}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Fundamentální systém má tedy tvar

$$\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}, \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right\}, \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right\}.$$

Pravá strana $3n + 2^{-n}$ není speciálního tvaru, jednotlivé sčítance ale ano, najdeme tedy pro ně řešení zvlášť a využijeme linearity rovnice.

- z^{-n} je tvaru $z^n (P(n) \cos(\gamma n) + Q(n) \sin(\gamma n))$
 pro $z = z^{-1}, \gamma = 0, P(n) = 1, Q(n)$ nehraje roli.
 $\frac{1}{2}$ není kořenem char. pol., i.e. hledáme
 řešení tvaru

$z^{-n} (a + b \cdot 0) = a z^{-n}$, parametr b nehraje
 roli. Dosazením do rovnice pro $n=1$:

$$8 \cdot 2a^{-4} + a2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{i.e.} \quad a = \frac{1}{2}, \text{ řešení má tvar}$$

$$2^{-n-1} = \tilde{y}(n)$$

- 3_n je tvaru $2^n (P(n) \cos(\gamma_n) + Q(n) \sin(\gamma_n))$
pro $\alpha=1, \gamma=0, P(n)=3_n, Q(n)$ nehráje roli,

1 není kořenem char. pol., i.e. hledám řešení tvaru $an+b$. Dosazením do rovnice pro $n=1, 2$:

$$\begin{aligned} 8(4a + b) + (a + b) &= 3 & 33a + 9b &= 3 \\ 8(5a + b) + (2a + b) &= 6 & 42a + 9b &= 6 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

Odečtením rovnic : $9a = 3$ i.e. $a = \frac{1}{3}$

Dosazením : $11 + 9b = 3$ i.e. $b = -\frac{8}{9}$.

Řešení má tvar $\hat{y}(n) = \frac{n}{3} - \frac{8}{9}$.

z linearity rovnice má tedy jedno možné řešení pro pravou stranu $3n + 2^{-n}$

tvář $\bar{y}(n) = \tilde{y}(n) + \hat{y}(n)$. Všechna řešení pak z tvář fund. systémů jsou tvář

$$y(n) = \frac{n}{3} - \frac{8}{9} + 2^{n-1} + c_1 (-2)^{-n} + c_2 2^{-n} \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + c_3 2^{-n} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right).$$

2) Naleznete řešení pro danou p.p.:

$$y(n+2) - 10y(n+1) + 24y(n) = 2^n, \quad y(1)=1, \quad y(2)=1$$

Nalezáme fund. systém homogenní rovnice.

Char. polynom je

$$\lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 6)(\lambda - 4),$$

Fundamentální systém je tedy

$$\{6^n\}, \{4^n\}.$$

První strana 2^n je tvaru $2^n (P(n) \cos(\gamma_n) + Q(n) \sin(\gamma_n))$ pro $\lambda = 2, \gamma = 0, P(n) = 1,$

$Q(n)$ nehráje roli. 2 není kořen char. pol.

Hledáme tedy řešený tvaru $a \cdot 2^n$.

Dosazením do rovnice pro $n=1$:

$$a \cdot 8 - 10a \cdot 4 + 24a \cdot 2 = 2$$

tedy $a = 2^{-3}$, našli jsme řešení $\tilde{y}(n) = 2^{n-3}$.

Ze tvaru fund. systému dostáváme obecné řešení

$$y(n) = 2^{n-3} + c_1 6^n + c_2 4^n$$

Dosazením do p.p.:

$$1 = 6c_1 + 4c_2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 6c_1 + 4c_2 = \frac{3}{4}$$

$$1 = 36c_1 + 16c_2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 36c_1 + 16c_2 = \frac{1}{2}$$

tedy $12c_1 = -\frac{5}{2}$ i.e. $c_1 = -\frac{5}{24}$. Dosazením dostaneme

$-\frac{5}{4} + 4c_2 = \frac{3}{4}$ i.e. $c_2 = \frac{1}{2}$. Řešením je tedy

$$g(n) = 2^{n-3} - \frac{5}{24} 6^n + \frac{1}{2} 4^n.$$